# T.H. para a média, $\mu$, duma população

***Hipóteses***:

| | | |
|---|---|---|
| $H_0: \mu = \mu_0$ <br> $H_1: \mu < \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$ <br> $H_1: \mu > \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$ <br> $H_1: \mu \neq \mu_0$ |

***Estatística de teste***: $\overline{X}$

<u>$\sigma$ *conhecido*</u>:

$$\left(n \geq 30 \ \vee \ X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)\right) \underset{\text{TLC} \vee \text{ TAN}}{\Rightarrow} \overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \ \therefore \ Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

<u>$\sigma$ *desconhecido*</u>:

i) <u>População normal</u>:

$$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \ \Rightarrow \ T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim \mathrm{T}(n-1)$$

ii) <u>Grandes amostras e população qualquer</u>:

$$n \geq 30 \ \Rightarrow \ T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

***Região crítica* (RC):**

$$H_0 \text{ verdadeira } \Rightarrow \mu = \mu_0$$

| | | |
|---|---|---|
| $P\left(\overline{X} < c \mid \mu = \mu_0\right) = \alpha$ | $P\left(\overline{X} > c \mid \mu = \mu_0\right) = \alpha$ | $P\left(\overline{X} < c_1 \mid \mu = \mu_0\right) = \frac{\alpha}{2}$ |
| $\text{RC} = \left\{\overline{X} : \overline{X} < c\right\}$ | $\text{RC} = \left\{\overline{X} : \overline{X} > c\right\}$ | $P\left(\overline{X} > c_2 \mid \mu = \mu_0\right) = \frac{\alpha}{2}$ |
| | | $\text{RC} = \left\{\overline{X} : \overline{X} < c_1 \vee \overline{X} > c_2\right\}$ |

***Decisão no <u>método da região crítica</u>*:**

$$\bar{x} \in \text{RC} \quad \Rightarrow \quad \text{Rejeitar } H_0$$

# T.H. para a média, $\mu$, duma população

***Valor p***:

| | | |
|---|---|---|
| $P\left(\overline{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right)$ | $P\left(\overline{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right)$ | $2\min\left\{P\left(\overline{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right), P\left(\overline{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right)\right\}$ |

***Decisão no <u>método do valor de prova</u>***:

$$Valor\ p < \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Rejeitar } H_0$$

# Exercício

Numa amostra de 100 lâmpadas de certo tipo, obteve-se um tempo médio de vida por lâmpada de 1570 h e um desvio padrão de 120 h.

a) Esta amostra será consistente com uma duração média de 1600 h para a população destas lâmpadas? Justifique ao nível de 1%.

b) Se a média real for de 1650 h, qual é o risco de tomar a decisão errada na alínea anterior?

a) $X$:"Tempo de vida de uma lâmpada, em horas" $\mu = E(X) = ?$

***Hipóteses***:

$$H_0 : \mu = 1600$$

$$H_1 : \mu \neq 1600$$

***Estatística de teste***: $\overline{X}$ :"Tempo médio de vida por lâmpada, em horas, numa amostra de 100"

$$n = 100 \Rightarrow \overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \wedge T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1) \quad ; \quad \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = 12$$

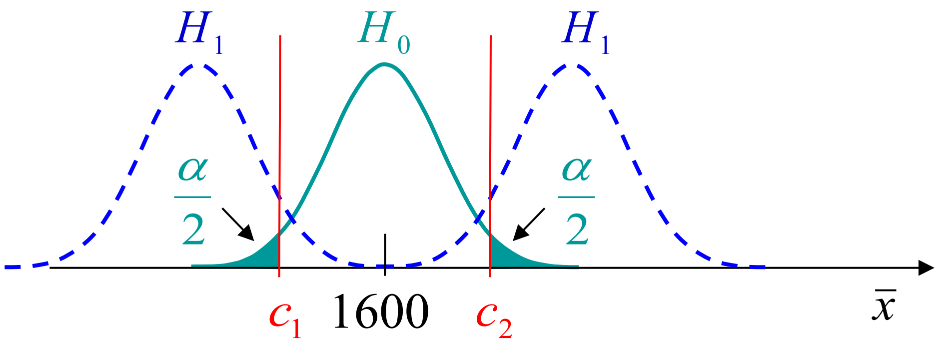
# Exercício

***Região crítica* (RC):**

$H_0$ verdadeira $\Rightarrow$ $\mu = 1600$

$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$

$= P(\overline{X} < c_1 \vee \overline{X} > c_2 \mid \mu = 1600)$




$$P(\overline{X} < c_1 \mid \mu = 1600) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c_1 - 1600}{12}\right) = 0.005 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1 - 1600}{12} = -2.58 \Leftrightarrow c_1 = 1569$$

$$c_2 - 1600 = 1600 - c_1 \Leftrightarrow c_2 = 2 \times 1600 - c_1 = 1631$$

$$\therefore \quad \text{RC} = \{\overline{X} : \overline{X} < 1569 \vee \overline{X} > 1631\}$$

***Decisão:***

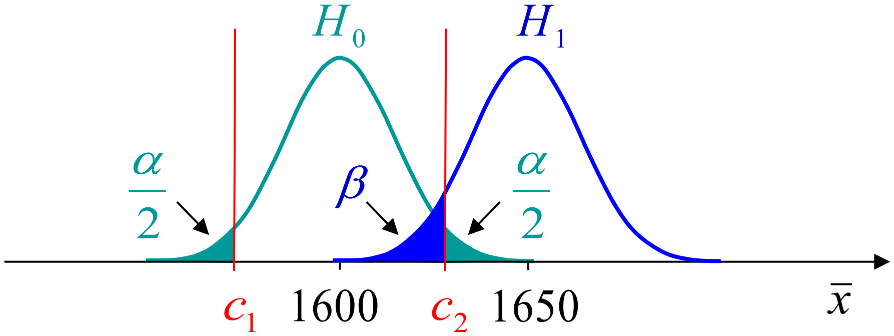
$\bar{x} = 1570 \notin \text{RC} \;\therefore\;$ $H_0$ não deve ser rejeitada ao nível de 1%, ou seja, não se pode contestar que $\mu = 1600$.

# Exercício

*Nota*: A decisão é a mesma no *método do valor de prova* já que este é equivalente ao *método da região crítica*. De facto,

$$Valor\ p = 2P\left(\overline{X} \leq 1570 \mid \mu = 1600\right) = 2\Phi\left(\frac{1570-1600}{12}\right) = 2\Phi(-2.5) = 0.0124 > \alpha$$

b) $\beta = P(\text{Erro do tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$




$$\beta = P\left(c_1 < \overline{X} < c_2 \mid \mu = 1650\right) = P\left(1569 < \overline{X} < 1631 \mid \mu = 1650\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1631-1650}{12}\right) - \Phi\left(\frac{1569-1650}{12}\right)$$

$$= \Phi(-1.58) - \Phi(-6.75) = 0.0571 - 0.0000 = 0.0571$$

# T.H. para a proporção de sucessos, $p$

***Hipóteses***:

| | | |
|---|---|---|
| $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p < p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p > p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p \neq p_0$ |

***Estatística de teste***: $\widehat{P}$

$$n \geq 30 \underset{TLC}{\Rightarrow} \widehat{P} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

# T.H. para a proporção de sucessos, *p*

***Região crítica* (RC):**

$H_0$ verdadeira $\Rightarrow \; p = p_0$

| | | |
|---|---|---|
| $P\left(\widehat{P} < c \mid p = p_0\right) = \alpha$ | $P\left(\widehat{P} > c \mid p = p_0\right) = \alpha$ | $P\left(\widehat{P} < c_1 \mid p = p_0\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ |
| $\text{RC} = \left\{\widehat{P} : \widehat{P} < c\right\}$ | $\text{RC} = \left\{\widehat{P} : \widehat{P} > c\right\}$ | $P\left(\widehat{P} > c_2 \mid p = p_0\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ |
| | | $\text{RC} = \left\{\widehat{P} : \widehat{P} < c_1 \vee \widehat{P} > c_2\right\}$ |

***Decisão no <u>método da região crítica</u>*:**

$\hat{p} \in \text{RC} \quad \Rightarrow \quad$ Rejeitar $H_0$

# T.H. para a proporção de sucessos, *p*

***Valor p***:

| | | |
|---|---|---|
| $P\left(\hat{P} \leq \hat{p} \mid p = p_0\right)$ | $P\left(\hat{P} \geq \hat{p} \mid p = p_0\right)$ | $2\min\left\{P\left(\hat{P} \leq \hat{p} \mid p = p_0\right), P\left(\hat{P} \geq \hat{p} \mid p = p_0\right)\right\}$ |

***Decisão no <u>método do valor de prova</u>***:

$$Valor\ p < \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Rejeitar } H_0$$

# Exercício

De acordo com certa teoria, determinado cruzamento de pêras produz pêras amarelas e verdes na proporção de 3:1. Num ensaio obtiveram-se 176 pêras amarelas e 48 verdes. Serão estes resultados compatíveis com a dita teoria?

$p$:"Proporção de peras amarelas na população de peras"

$p = ?$

$n = 176 + 48 = 224$

$\alpha = 0.05 \quad (\text{Por defeito})$

***Hipóteses***:

$$H_0 : p = 3/4$$
$$H_1 : p \neq 3/4$$

***Estatística de teste***: $\widehat{P}$ :"Proporção de peras amarelas numa amostra de 224"

$$n = 224 \underset{\text{TLC}}{\Rightarrow} \widehat{P} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

# Exercício

***Região crítica*** **(RC):**

$$H_0 \text{ verdadeira} \quad \Rightarrow \quad p = 3/4 \quad \therefore \quad \hat{P} \sim \mathrm{N}\left(3/4, \frac{3/4 \times 1/4}{224}\right) = \mathrm{N}\left(3/4, \frac{3}{3584}\right)$$

$$\alpha = P\left(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\hat{P} < c_1 \vee \hat{P} > c_2 \mid p = 3/4\right)$$

$$P\left(\hat{P} < c_1 \mid p = 3/4\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c_1 - 3/4}{\sqrt{3/3584}}\right) = 0.025 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1 - 3/4}{\sqrt{3/3584}} = -1.96 \Leftrightarrow c_1 = 0.693$$

$$c_2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - c_1 \Leftrightarrow c_2 = 2 \times \frac{3}{4} - c_1 = 0.807 \quad \therefore \quad \mathrm{RC} = \left\{\hat{P} : \hat{P} < 0.693 \vee \hat{P} > 0.807\right\}$$

***Decisão:***

$\hat{p} = \frac{176}{224} \approx 0.786 \notin \mathrm{RC} \;\therefore\; H_0$ não deve ser rejeitada ao nível de 5%, ou seja, não se pode contestar que p = 3/4.

*Nota*:

$$Valor\ p = 2P\left(\hat{P} \geq 0.786 \mid p = 3/4\right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{0.786 - 3/4}{\sqrt{3/3584}}\right)\right] = 2\Phi(-1.24) = 0.2150 > \alpha$$